指数函数的概念教案

一 授课内容

人教 A 版高中数学必修第一册第四章 4.2.1《指数函数的概念》。授课对象为已学习函数概念和实数指数幂的高一学生，课型为新授课。主体教学 21 分钟，另留 1 分钟机动。

从细胞二分裂与“一尺之棰，日取其半”的对照情境出发，抽象指数函数的定义，辨析整体形式与底数条件；初步观察两个具体函数的图象，学习由已知函数值确定解析式并求值，最后联系纪念碑局部轮廓观察与星火相传主题。

二 教学目标

1. 通过观察二分裂与日取其半，识别固定倍率，写出相应数量关系，区分情境中的非负整数步数与抽象函数中的实数自变量，发展数学抽象和数学建模素养。

2. 准确表述指数函数的定义，理解底数限制的理由，能够先作等价变形，再依据完整定义辨析函数，发展逻辑推理素养。

3. 能由已知函数值确定底数、写出解析式并求指定函数值；通过描点与图象观察，说出两个具体指数函数图象的共同点和变化方向，发展数学运算与直观想象素养。

4. 体会数学在数量表达和真实轮廓近似描摹中的作用；通过纪念主题，将文化感受落实到学懂概念、写清推理和承担责任的具体行动。

三 教学重难点

教学重点：指数函数的完整定义；依据定义判断一个函数是否为指数函数；由已知函数值确定底数、写出解析式并求值。

教学难点：从离散的具体情境过渡到实数自变量的函数研究；通过等价变形辨清整体形式；区分底数为零、负数和一时被排除的不同理由。

四 教学内容

教学主线：情境探究 → 抽象定义 → 辨析形式与底数条件 → 图象初识 → 例题示范 → 独立练习与反馈 → 小结、作业与寄语。具体教学活动如下。

环节一 对照情境 发现固定倍率 0—3.5 分钟

教师活动：同页分别展示大肠杆菌二分裂与木棰取半，两个面板独立操作。先观察二分裂五轮，记录每轮完成后的总数；再读《庄子·天下》所记“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，观察五天后剩余长度。

关键问题：每完成一轮，细胞总数乘什么数？每天取走剩余长度的一半，还剩原来的几分之几？两种变化方向不同，共同规律是什么？

学生活动与预设：独立记录，再口头比较。细胞数依次为 1、2、4、8、16、32；木棰剩余长度依次为 1、二分之一、四分之一、八分之一、十六分之一、三十二分之一尺。共同点是每一步都乘同一固定数。

$$N(n)=2^n,\qquad L(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n,\qquad n\in\{0,1,2,\dots\}.$$

追问：这里的轮数、已经过的整天数，可以直接取负数或半次吗？引导学生说明：当前记录按完整步骤计数，步数取非负整数。

设计意图与评价：用一增一减的对照突出“固定倍率”，避免把指数函数只理解为增长。以学生能否说明倍率和变量范围，判断是否具备抽象基础。

教师提示：细胞计数采用资源适宜、理想同步且不计死亡的简化假设；动画时长不代表真实生物时间。木棰采用可无限细分的数学理想化，不展开极限。

环节二 改变研究对象 抽象完整定义 3.5—6 分钟

教师过渡：“现在离开具体的轮数和整天数，借助已经学过的实数指数幂，研究自变量可以取任意实数时的对应关系。”由两个具体底数推广到固定字母底数。

$$y=2^x,\qquad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x\quad\rightarrow\quad y=a^x.$$

概念表述：一般地，函数

$$y=a^x\qquad(a>0,\ a\neq 1)$$

叫做指数函数，其中底数是常数，自变量位于指数位置，定义域是全体实数。

师生核对：谁固定，谁变化？定义域是什么？让学生完整复述一般形式、底数条件与定义域，并标记底数和指数各自承担的角色。

设计意图：实数范围的研究以已学实数指数幂为依据，不把细胞的实际轮数直接解释成任意实数。

环节三 等价变形 辨清整体形式 6—8.5 分钟

教师呈现下列四式，请学生先独立判断，再说明依据。优先让持不同判断的学生比较理由。

$$① \ y=3^{-x} \quad ② \ y=2^{x+1} \quad ③ \ y=4\cdot 2^{x-2} \quad ④ \ y=x^2.$$

预设与反馈：①符合，因为可改写成固定正底数的标准形式；②不符合本节定义；③符合，必须先化简；④是幂函数，自变量在底数位置。

$$3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x, \qquad 4\cdot 2^{x-2}=2^2\cdot 2^{x-2}=2^x.$$

追问：“只要自变量出现在指数位置，就一定符合定义吗？”用②说明必须看整体形式。代入零所得函数值不是一，可用于排除；零处取值为一，单独不足以肯定。归纳方法：先作等价变形，再核对完整定义。

环节四 用反例理解底数限制 8.5—10.5 分钟

教师设问：“底数为什么要大于零且不等于一？三种被排除情形的理由是否相同？”学生先想一个反例，再交流。

$$a=0:\quad 0^{-1} \text{ 无意义;} \qquad a=-2:\quad (-2)^{1/2} \text{ 在实数范围内无意义.}$$

预设：前两种情形不能保证每个实数自变量都有确定的实数函数值。底数为一时，得到处处有意义的常值函数，是本节定义排除的情形。

$$a=1: \qquad 1^x=1.$$

教师反馈：明确区分“不能在全体实数上按通常实数幂定义”与“定义排除常值情形”，不把底数为一说成没有意义或没有研究价值。

环节五 两条具体曲线的图象初识 10.5—12.5 分钟

教师给出五点表，师生口答核对后描点，显示对应实数函数的连续曲线。

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$(\frac{1}{2})^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

问题与预设：共同经过哪个点？两条曲线在横轴哪一侧？从左到右怎样变化？学生观察：都经过零一这个点，都在横轴上方，一条上升、一条下降。

评价与边界：让学生用图象支持观察结论。本环节只认识两个具体例子，不用五个点证明全局性质，不列完整性质表，不追加比较大小题。

环节六 教材例 1 改编 由值求式 12.5—15 分钟

题目：已知指数函数满足下列条件，求指定函数值。

$$f(x)=a^{x}\ (a>0,\ a\neq 1),\qquad f(3)=8.\qquad \text{求 } f(0),\ f(1),\ f(-3).$$

教师引导：“括号里的三、等号右边的八，分别表示什么？已知的对应关系怎样转成关于底数的方程？”请学生口答第一步，再依次呈现完整推理。

$$a^{3}=8\ \Rightarrow\ a=2\ \Rightarrow\ f(x)=2^{x}.$$

$$f(0)=1,\qquad f(1)=2,\qquad f(-3)=2^{-3}=\frac{1}{8}.$$

预设错误与处理：若把三与八的位置写反，回到“自变量为三时函数值为八”的含义；若把负三次幂写成负数，要求先写成正指数幂的倒数。确定底数后补验底数条件。

方法板书：已知函数值 → 关于底数的方程 → 确定底数并写解析式 → 代入求值。本题为教材例 1 改编，采用八作为已知值，降低运算负担。

环节七 独立落笔 当堂核对 15—17.75 分钟

任务一：下列哪些函数符合本节指数函数定义？为一个不符合的式子写出理由。

$$\text{①}\ y=2^{x}\quad \text{②}\ y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\quad \text{③}\ y=1^{x}\quad \text{④}\ y=2^{x}+1.$$

任务二：已知下列指数函数及条件，求函数值。

$$f(x)=a^{x}\ (a>0,\ a\neq 1),\qquad f(-1)=2.\qquad \text{求 } f(2).$$

组织方式：先留约一分钟独立书写，教师巡视；再根据实际作答请学生说明理由，必要时用约 20 秒同伴核对一处分歧，随后逐题显示解析。思考与核对合计约 2 分 45 秒，可调用机动时间。

核对要点：任务一①②符合；③底数为一被定义排除；④整体形式不符合定义。任务二完整解答如下。

$$a^{-1}=2\ \Rightarrow\ \frac{1}{a}=2\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{2},\qquad f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}.$$

形成性评价：查看学生是否独立写出判断理由、是否正确处理负指数、是否先确定底数。若同类错误集中，优先补讲其依据；拟合环节改用静态截图，以保证概念与求值学习完成。

环节八 知识小结与真实轮廓观察 17.75—19.5 分钟

知识小结约 45 秒。请学生依次说出：完整定义；先化简再辨析；由值求底数再求值。补充回看两条图象的共同点与变化方向。

过渡语：“函数不仅能表达数量关系，也能帮助我们描摹形状。”播放纪念碑局部拟合约 22 秒：聚焦实景、沿边缘取点、观察候选曲线贴近样本、比较局部偏差，最后收去辅助线。观察与口播合计约一分钟。

说明：“在选定的坐标和这一小段范围内，我们用指数型曲线，对真实轮廓作了局部近似。”不讲拟合算法，不推定建筑设计依据；具体碑名未经核实，沿用“纪念碑实景”。

环节九 布置作业 19.5—20 分钟

必做：所用教材第 115 页练习 2、3。练习 2 写出满足条件的一个解析式；练习 3 先根据固定增长率建立关系式，再用计算工具求近似值。选做：练习 1 图象辨认。下一课继续研究指数函数图象与性质。

作业评价：解析式是否符合题设，是否说明变量范围，运算与单位是否正确。练习 2 保留原题“一个解析式”的要求，不把离散条件解释为唯一确定全体实数上的函数。

环节十 从纪念走向当下行动 20—21 分钟

教师寄语：“再看这座纪念碑。刚才，我们关注它的轮廓；现在，请把目光投向它所承载的纪念。星星之火，可以燎原。今天，我们接过这份光亮，就从学懂一个概念、写清一步推理、把一份责任担起来开始。把每一次认真写进自己的成长，成就更好的自己。”停留片刻后下课。

设计意图：先完成知识收束与作业安排，再由实景承载纪念、由纪念落到学习行动。文化寄语不作为数学推论，不把历史或个人成长当作指数函数的精确模型。

板书安排

指数函数　　$y=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1), \quad x\in\mathbb{R}$

$2^n,\ (1/2)^n \quad \rightarrow \quad a^x$　　先化简 再核对定义

$f(3)=8 \Rightarrow a^3=8 \Rightarrow a=2 \Rightarrow f(x)=2^x$

板书左侧保留情境中的两个关系，中间保留完整定义与底数条件，右侧保留主例推理。图象由课件呈现，黑板只标记共同点及一升一降的观察。